**习题一**

【1】试确定下列集合是否是数域，并说明理由：

（1），为整数集；

（2），为有理数集；

（3），，为整数集；

（4），，为有理数集；

【解答】（1）否.存在，但，对于除法不封闭.

（2）是.可参考第三页的证明方法.

（3）否.存在，但，对于除法不封闭.

（4）是.可参考第三页的证明方法.

【2】写出矩阵：

（1）；

（2）其中



（3），其中



（4），其中



【解答】（1）我们容易得到，故有矩阵为



（2）可以发现只有当时，才有，否则.故我们可以得到矩阵



（3）显然，当时，；其余位置根据顺序写下来即可.我们可以得到矩阵：



（4）根据对角线可以分为两块，有



【3】设



求的值.

【解答】即解方程，我们有



容易得到.

【4】用初等行变换把下列矩阵化为简化阶梯形矩阵：

（1） （2）（3）

（4）（5） （6）

（7） （8）

【解答】

（1）



（2）



（3）



（4）



（5）



（6）



（7）

（8）



【5】判断下列线性方程组解的情况（不求解）：

（1） （2）

（3） （4）

（5）为何值时，方程组无解？

（6）为何值时，方程组无解？

【解答】可以通过矩阵化简从秩来判断方程组解的情况，我们分别有：

（1）容易得到矩阵以及其变换后形式为：



化简到此处可以简单的判断该矩阵秩为3，故方程有唯一解.

（2）容易得到矩阵以及其变换后形式为：



化简到此处可以发现出现了无解的方程，故该方程组无解.

（3）容易得到矩阵以及其变换后形式为：



化简到此处可以简单的判断该矩阵秩为2，少于未知数个数，故方程有无数解.

（4）容易得到矩阵以及其变换后形式为：



化简到此处可以发现出现了无解的方程，故该方程组无解.

（5）容易得到矩阵以及其变换后形式为：



为了使方程组无解，我们需要得到一个无解方程，故需要满足



故时方程组无解.

（6）容易得到矩阵以及其变换后形式为：



为了使方程组无解，我们需要得到一个无解方程，故需要满足



故时方程组无解.

【6】用高斯消元法解下列齐次线性方程组：

（1） （2）

（3） （4）

【解答】写出方程组对应的矩阵，然后通过高斯消元法消元即可.

（1）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：



从而可以得到.

（2）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：



从而可以得到.

（3）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：



从而可以得到.

（4）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：



从而可以得到.

【7】用高斯消元法解下列齐次线性方程组：

（1） （2）

（3） （4）

（5） （6）

【解答】写出方程组对应的矩阵，然后通过高斯消元法消元即可.

（1）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：



故方程的解为.

（2）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：



故方程的解为.

（3）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：



故方程无解.

（4）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：



故方程的解为.

（5）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：



故方程的解为.

（6）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：



故方程的解为.

【8】下列线性方程组中取何值时，方程组有唯一解？有无穷多解？无解？在有解的情况下求出所有的解.

（1） （2）

（3） （4）

【解答】通过矩阵变换和秩可以来判断方程组的解的情况.

（1）我们写出矩阵以及其变换后结果如下：



我们容易得到

（i）且时无解.（根据解出）；

（ii）时有无穷多解，解为；

（iii）时有无穷多解，解为.

（2）我们写出矩阵以及其变换后结果如下：



我们容易得到

（i）时方程无解；

（ii）时方程有唯一解，解为；

（iii）时方程有无穷多解，解为.

（3）我们写出矩阵以及其变换后结果如下：

当时



若，方程有无穷多解，解为.

若时，方程解为



当时，，发现方程组无解.

综上所述：

（i）时无解；

（ii）时方程有无穷多解，解为；

（iii）时，方程解为.

（4）我们写出矩阵以及其变换后结果如下：

当时



若，方程有无穷多解，解为.

若时，方程解为



当时，



发现方程组无解.

综上所述：

（i）时无解；

（ii）时方程有无穷多解，解为；

（iii）时，方程解为.

【9】令，试证明是一个数域.

【解答】显然.，容易知道.当不同时为零时，它们的商为



由于，故容易知道



即，故是一个数域.

【10】设是至少包含一个非零元的数集，且对四则运算封闭，证明为一个数域.

【解答】至少包含一个非零元，我们取之记为，注意到对于四则运算封闭，故，且，根据数域的定义，我们可以得到为一个数域.

【11】证明任何一个数域必包含有理数域.

【解答】根据数域的定义，数域包含且对于四则运算封闭.根据加法的封闭性，我们可以知道任意正整数都属于该数域（）.

根据减法封闭性可以知道任意负整数也属于该数域.从而任意整数属于该数域.再根据除法的封闭性可以知道任意两个整数之比也属于该数域，也即任意有理数属于该数域.

从而我们知道了有理数域是最小的数域，任意数域都包含它.

【12】若数域真包含实数域，则为复数域.

【解答】此处我们讨论的数域中，复数域为最大的数域.考虑反证法，若而，那么必然，且是一个域.那么由于，则中一定有一个虚数.

因为，所以（对于减法封闭），又因为且，所以.

则，显然，所以，这说明了，这与矛盾，故不存在这样的，也就是说.

【13】试证明的子集若对减法封闭，则必对加法封闭.

【解答】可设，于是有.又因为，若有，则必有，故若对减法封闭，则必对加法封闭.

【14】试证明的子集若对除法封闭，则必对乘法封闭.

【解答】可设，于是有，因此.又因为，若有，则必有，故若对除法封闭，则必对乘法封闭.

【15】的非齐次线性方程组，设其系数矩阵的阶梯型的非零行数为，试分别在下面两个条件下，判断此线性方程组的解.

（1）； （2）.

【解答】非零行数代表了行秩，我们有

（1）时，此时方程个数等于未知数个数，则对于非齐次方程组来说有唯一解或者无解.

（2）时，此时行满秩，则对于非齐次方程组来说必定有解.